参加者の任務達成確率を考慮した確率取締ゲーム(最適化数理の手法と実際)

宝崎, 隆祐

数理解析研究所講究録 1461 巻 2005 年 225-238

参加者の任務達成確率を考慮した確率取締ゲーム

防衛大学校・情報工学科　宝崎隆祐 (Ryusuke Hohzaki)
Department of Computer Science,
National Defense Academy

1 はじめに

本論文で取り上げる取締ゲームは一般に "Inspection ゲーム" と呼ばれ，そのの原型は１９６０年代に行われた Dresher [2] と彼のモデルをより一般化した Maschler [5] の研究に見ることができる．Maschler は，この多段階の２人ゼロ和ゲームの研究成果を軍縮条約に付随して起こる査察問題に適用しようとした．すなわち，彼は，条約の違反行為への誘惑を持つプレイヤー II とその取り締まりのために時折査察を実施しようとするプレイヤー I とのゲームを論じた．そのモデルは，査察により違反行為が発覚した場合，ペナルティ1 がプレイヤー II に科せられるモデルとしている．しかし，仮に常時査察が行われる場合でも，プレイヤー II は別払い q を支払うことにより違反行為摘発を逃れることができる．Dresher は $q=1/2$ 及び $q=1$ の特殊例について，Maschler は一般的な $0 \leq q \leq 1$ について論じた．更に，彼らのモデルは，Thomas and Nisgav [7] により，密輸者とその違法行為を監視する税関とのゲームに置き換えられて研究されたが，税関のパトロール・ボート使用隻数が１隻の場合と２隻の場合に密輸検挙の際に得られる利得が異なるモデルに拡張されている．彼らは問題を多段繰り返しゲームに定式化しているものの，ゲームの解の導出に関しては，初期ステージからの繰り返し計算により１段階ゲームを逐次に解いていく簡単な数値計算手法を採っている．

以上の研究成果に対し，ゲームの値を閉じた式で与えたのが Baston and Bostock [1] である．それまでの研究では，違反行為及び密輸行為は査察または監視により必ず摘発されるとした "完全摘発" のケースのみが考えられていたが，彼らは，ボートの隻数により摘発確率が異なるとする拡張したモデルに対し，その解の導出に成功している．ただし，密輸者側の密輸決行の回数は，従来の研究と同じく１回のみとしている．Garnaev [4] は，使用ボートの隻数を３隻まで許したモデルにより，彼らの研究成果を拡張した．

これまでの研究に対し，複数回の密輸実行の可能性をもつモデルを完全摘発の仮定の下で論じたのが Sakaguchi [6] である．彼の論文では，複数回実行可能である非合法行為を決められた回数実施しなければならない場合とプレイヤーの意思に任される場合の２つのモデルについて論じられているが，１９６０年代の研究モデルである前者のモデルは，後者に比べ分析がより容易であることが明らかにされている．Baston and Bostock のモデルは後者に属しているが，Sakaguchi は彼らがゲームの値に関して導出した公式を別の観点から再び導いている．彼の l 回密輸実行モデルは，基本的には１段階ゲームである１回密輸モデルを繰り返すに過ぎないため，ゲームの値は１段階ゲームの値を l 倍することにより得られる．また，ゲームの解が混合戦略となることを仮定した上で式の導出を行っているため曖昧な点が残ったが，これが将来への更なる研究の誘因となった．Sakaguchi モデルを拡張したと言えるのが，Ferguson and Melolidakis [3] である．彼らは，Inspection ゲームの初期の研究にあったように別払いの仮定を付加し，複数回実施可能な不法行為を１回免除される毎にコスト $q(\leq 1)$ の支払が伴うとした．不法行為を行った場合摘発されれば損失１を被

るが，摘発されなければ損失ゼロであるため，不法行為を行うか，コスト q の支払による免除を選択するかの興味深い視点が含まれたものとなっている．

以上の過去の研究に対し，本研究で取り上げるモデルは，不法行為が複数回実施可能なSakaguchiモデル[6]と同じであるが，パトロールによる摘発は彼のモデルとは異なり完全ではなく，“摘発”，“不法行為成功”及び“そのいずれでもない”の3つの結果が確率的に生じる．すなわち，プレイヤーの任務達成確率が考慮されたモデルとなっている．さらに，不法行為は複数回実施可能であるものの，摘発によりゲームは終了するものとしているため，不法行為実施の機会を残したままゲームが終わる場合もある．過去の研究モデルでは，不完全摘発の仮定の下であっても，不法行為の実施による結果は“摘発”か“不法行為成功”かのいずれかであるため，不法行為が1回のみ許されるモデルであれば不法行為実施の戦略を採ることによりゲームは必ず終了し，多数回許容のモデルであれば許容回数が1回減少するだけで，必ず次のゲームに移行する．この論文では，“任務達成確率”を導入することにより問題は文字通り確率ゲームとなり，状態が変化した次のゲームへの遷移は確率的となっている．

以下，次の節ではモデルの前提について詳述し，ゲームの推移を考察することにより問題を確率多段ゲームとして定式化する．3節では，ゲームの値がもつ性質を調べることにより各ステージにおけるゲームの解が混合戦略により表されることを証明し，ゲームの値及びゲームの解を求める．特に，いくつかの特殊なケースについては閉じた式を与える．4節においては，その結果を“完全摘発”のケースに適用し，Sakaguchi[6]が与えた式を導くことができることを示す．そのことは，Sakaguchiが未証明であった多段ゲームにおける混合戦略の最適性に証明を与えることになる．さらに，5節においては，数値例を用いてゲームの性質について検証する．

2 モデルの前提と定式化

ここでは，パトロールを実施するプレイヤーAと密輸を行うプレイヤーBとの間で行われる次のような2人ゼロ和の多段確率ゲームを考える．

A1. 二人のプレイヤーA，Bが1日に1回のアクションをとる全体で N 日の多段ゲームを考える．残り日数によりゲームのステージ数を表す．

A2. プレイヤーAは最大で K 日のパトロールを実施可能であり，プレイヤーBは最大で L 日の密輸を行うことができる．ただし，$K > N$ や $L > N$ のようにパトロールや密輸の実施可能日数が残り日数を超過する場合は，超過日数分は実施できずにその機会は失われる．

A3. 1回のアクションに際し，プレイヤーAはパトロールを実施するか否かの2つの手をもち，プレイヤーBは密輸を行うか否かの同じく2つの手をもつ．

A4. プレイヤーBが密輸を行った日にプレイヤーAがパトロールを実施すれば，確率 p_1 でプレイヤーBを摘発できるが，逆に密輸が成功することも確率 p_2 で起こる．また，パトロールが実施されなければ，密輸は必ず成功する．

A5. プレイヤーAによるプレイヤーBの摘発は，プレイヤーAに利得 $\alpha > 0$ をもたらし，逆に密輸の成功によりプレイヤーBは利得1を得る．ただし，

$$\alpha p_1 - p_2 > 0 \tag{1}$$

とする．このゲームは，プレイヤーAの利得がプレイヤーBに同量の損失をもたらし，逆もまた真であ

る２人ゼロ和であるとするが，問題の支払はプレイヤーAの利得で定義される．

A6. ある日においてプレイヤーAがプレイヤーBを摘発できない場合は，次の日のゲームに移る．プレイヤーBの摘発により，また残り日数が尽きた場合にゲームは終了する．

A7. 以上のような前提を，両プレイヤーは共に了解している．

仮定A5における利得 α と1は相対的な数として設定されている．また，条件(1)は，密輸が行われていると分かっている現場にプレイヤーAが派遣される動機を与える．また，この条件は $p_1>0$ であることも示している．

いま残り日数 n 日のステージにおいて，プレイヤーAの最大可能パトロール回数 k，プレイヤーBの最大密輸実施可能回数 l の場合のゲームを $\Gamma(n,k,l)$ で表すと，これは次のような漸化式で表現できる多段ゲームとなる．

$$\Gamma(n,k,l):=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \qquad\qquad S & \qquad\qquad\qquad NS \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ NP \end{array} & \left(\begin{array}{cc} \alpha p_1-p_2+(1-p_1)\Gamma(n-1,k-1,l-1) & \Gamma(n-1,k-1,l) \\ -1+\Gamma(n-1,k,l-1) & \Gamma(n-1,k,l) \end{array}\right) \end{array}. \tag{2}$$

２つの行はプレイヤーAの２つの戦略｛パトロールを実施 (P)，未実施 (NP)｝を，２つの列はプレイヤーBの戦略｛密輸を実施 (S)，未実施 (NS)｝を示している．各要素の式は極めて自明であるが，特にプレイヤーAがパトロールを，プレイヤーBが密輸を実施する場合の１行１列の要素は，この日の期待利得が αp_1-p_2 であり，さらに確率 $1-p_1$ でプレイヤーBは摘発されずに次の日のゲームに移ることから導かれる．

式(2)から，ゲーム $\Gamma(n,k,l)$ のゲームの値 $v(n,k,l)$ は次式で求められる．

$$v(n,k,l)=val\left(\begin{array}{cc} \alpha p_1-p_2+(1-p_1)v(n-1,k-1,l-1) & v(n-1,k-1,l) \\ -1+v(n-1,k,l-1) & v(n-1,k,l) \end{array}\right). \tag{3}$$

ただし，記号 val はそれに続く２行２列の行列ゲームの値を表す．モデルの前提から，初期条件として

$$v(0,k,l)=0,\ v(n,k,0)=0,\ v(n,0,l)=-l \tag{4}$$

が言える．また，添字の範囲としては $k\le n,\ l\le n$ であるが，前提(A2)を考慮し，これを次のように拡張して考えても差し支えない．

$$v(n,k,l)=\begin{cases} v(n,n,l), & k>n \text{ のとき} \\ v(n,k,n), & l>n \text{ のとき}. \end{cases} \tag{5}$$

3 ゲームの性質とゲームの解

ここで次のような記号を用いる．式(2)のゲーム $\Gamma(n,k,l)$ において，プレイヤーAの混合戦略 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$ は，戦略 P を確率 x_1 で，戦略 NP を確率 x_2 で採ることを示しており，プレイヤーBの混合戦略 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)$ は，戦略 S，NS をそれぞれ確率 y_1，y_2 で採ることを意味する．もちろん，$x_1+x_2=1$，$y_1+y_2=1$ である．また，このステージ n におけるプレイヤーAの混合戦略 $\boldsymbol{x}$ とプレイヤーBの混合戦略 $\boldsymbol{y}$ により得られる期待支払を $E_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ と書く．$E_n(\boldsymbol{x},S)$，$E_n(NP,\boldsymbol{y})$ のように引数として戦略の記号を用いた場合は，プレイヤーがその純粋戦略を採った場合の期待利得であるとする．

さて，ゲームの値を与える(3)式から，次の補題が成り立つ．

補題 1 プレイヤーAのパトロール実施回数が残り日数と同じ場合，ゲームの値はゼロであり，プレイヤーAの最適戦略は毎日パトロールを行い，プレイヤーBのそれは決して密輸を実行しないことである．すなわち，$v(n,n,l)=0$ であり，任意のステージにおけるプレイヤーの最適戦略は $x_1^*=1$，$y_1^*=0$ となる．

(証明)　$v(1,1,0)=0$ である．また，(3) 式から得られる次式により，ゲーム $\Gamma(1,1,1)$ は $x_1^*=1$, $y_1^*=0$ の戦略により決まる鞍点をもつ．

$$v(1,1,1)=val\begin{pmatrix}\alpha p_1-p_2 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}=0\ .$$

したがって，$n=k=1$ のとき補題は成立する．同様に，$v(n-1,n-1,l)=0$ を仮定すれば，条件式 (4) 及び (5) から，ゲーム $\Gamma(n,n,l)$ の値は

$$v(n,n,l)=val\begin{pmatrix}\alpha p_1-p_2 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}=0$$

となり，最適解は $x_1^*=1$, $y_1^*=0$ である．　**Q.E.D.**

補題 1 は特殊な場合のゲームの解について述べたものであるが，一般の場合にゲームを解くためには，以下の補題が役に立つ．

補題 2 ゲームの値に関して，次が成り立つ．

(i) ゲームの値は常に非正である．

$$v(n,k,l)\le 0\ . \tag{6}$$

(ii) $v(n,k,l)$ は k に対して非減少，l に対して非増加である．

$$v(n-1,k-1,l)\le v(n-1,k,l),\quad v(n-1,k,l-1)\ge v(n-1,k,l)\ . \tag{7}$$

(iii) 次の不等式が成り立つ．

$$\alpha p_1-p_2+(1-p_1)v(n-1,k-1,l-1)\ >\ v(n-1,k-1,l) \tag{8}$$

$$-1+v(n-1,k,l-1)\ \le\ v(n-1,k,l) \tag{9}$$

$$\alpha p_1-p_2+(1-p_1)v(n-1,k-1,l-1)\ >\ -1+v(n-1,k,l-1)\ . \tag{10}$$

(iv) $v(n,k,l)$ はステージ数 n に対して非増加である．

$$v(n-1,k,l)\ge v(n,k,l)\ . \tag{11}$$

(証明)　(i) 初期条件 (4) から，プレイヤーBがすべての日に「密輸しない」戦略をとった場合任意のステージ n における期待利得はゼロであり，任意の混合戦略 $\boldsymbol{x}$ に対し $E_n(\boldsymbol{x},NS)=0$ となる．したがって，プレイヤーAの最適戦略 $\boldsymbol{x}^*$ とそれに対するプレイヤーBの最適反応戦略 $\boldsymbol{y}^*$ により，$v(n,k,l)=E_n(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)\le E_n(\boldsymbol{x}^*,NS)=0$ が成り立つ．
(ii) ステージ $n-1$ 以後 k 回のパトロールを実施できるプレイヤーAの戦略は，そのうちの 1 回を意図的に放棄して $k-1$ 回のパトロール実施可能数で立案する戦略を含むから，第 1 の不等式は明らかに成り立つ．同様に，第 2 の不等式も成立する．
(iii) 性質 (i), (ii) 及び式 (1) より以下の変形は正しく，不等式 (8) が成り立つ．

$$\alpha p_1-p_2+(1-p_1)v(n-1,k-1,l-1)\ge \alpha p_1-p_2+(1-p_1)v(n-1,k-1,l)$$
$$\ge \alpha p_1-p_2+v(n-1,k-1,l)>v(n-1,k-1,l)\ .$$

不等式 (9) の左辺は，プレイヤーBの１回の密輸機会を密輸成功によるプレイヤーAの損失 -1 により無条件に置き換えている式となっていることから，この不等式の成立は納得できる．しかしながら，不等式 (10) と (9) を同時に証明しよう．$n=1$ の場合，不等式 (9) 及び (10) は明らかに成立する．いま，$(n,k,l)=(1,1,1)$ から現在の添字 (n,k,l) まで，これら２つの不等式が成り立っているとする．(3) 式の行列ゲームに関し，ミニマックス値 $\geq v(n,k,l) \geq$ マックスミニ値 であるから，不等式 (7), (8) を考慮すれば，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}&\min\{\alpha p_1 - p_2 + (1-p_1)v(n-1,k-1,l-1),\ v(n-1,k,l)\}\\&\qquad\geq v(n,k,l) \geq \max\{v(n-1,k-1,l),\ -1+v(n-1,k,l-1)\}\ .\end{aligned} \tag{12}$$

上式の右の不等式で k を $k-1$ で置換すると，$v(n,k-1,l) \geq -1+v(n-1,k-1,l-1)$ である．また，左の不等式から $\alpha p_1 - p_2 + (1-p_1)v(n-1,k-1,l-1) \geq v(n,k,l)$ である．以上２つの不等式から，

$$\begin{aligned}&v(n,k,l)-(1-p_1)v(n,k-1,l) \leq\\&\alpha p_1 - p_2 + (1-p_1)v(n-1,k-1,l-1)-(1-p_1)\{-1+v(n-1,k-1,l-1)\}\\&=\alpha p_1 - p_2 + 1 - p_1 < \alpha p_1 - p_2 + 1\end{aligned}$$

である．故に，$-1+v(n,k,l) < \alpha p_1 - p_2 + (1-p_1)v(n,k-1,l)$ となり，$n-1$ を n に代えた (10) 式が成り立つ．また，式 (12) の左不等式で l を $l-1$ とおいた式 $v(n-1,k,l-1) \geq v(n,k,l-1)$ と右不等式から，$v(n,k,l) \geq -1+v(n-1,k,l-1) \geq -1+v(n,k,l-1)$ が言える．以上から，(9) 式が証明された．

(iv) (12) 式の左不等式から明らかである．　**Q.E.D.**

補題 2 の性質 (ii) 及び (iv) は，ゲームの性質上当然の結果である．特に残り日数 n の増加は，全日数に対する与えられた回数のパトロールによるカバー率の低下をまねき，逆に密輸者の密輸実施予定日の選択肢を増やすから，プレイヤーAには不利に働く．このことから性質 (iv) が理解できる．

補題 2 を用いることにより，以下のように直ちにゲームの解を求めることができる．分かり易いように，行列ゲーム (3) 式の各要素を記号 a, b, c, d と置き，それらの大小関係を表したものが次式である．

$$v(n,k,l) = val\begin{pmatrix} a & > & c \\ \vee & & \wedge\!| \\ b & \leq & d \end{pmatrix}\ . \tag{13}$$

ただし，

$$\begin{aligned}a &= \alpha p_1 - p_2 + (1-p_1)v(n-1,k-1,l-1),\quad b=-1+v(n-1,k,l-1),\\ c &= v(n-1,k-1,l),\quad d=v(n-1,k,l)\ .\end{aligned} \tag{14}$$

不等式において等号が成立するか否かで，鞍点の存在や戦略間での優越・被優越の関係が生じる．(i) $c=d$ の場合，プレイヤーAの戦略 P は NP を優越し，その結果ゲームの値は $v(n,k,l)=c=d$ となり，ゲームの解の１つは $x_1^*=1$, $y_1^*=0$ となる．(ii) $b=d$ であれば，ゲームの値は $v(n,k,l)=b=d$ に，ゲームの解の１つが $x_1^*=0$, $y_1^*=0$ となる．しかしながら，このような特殊な場合においてもゲームの解は混合戦略による均衡解の範疇で議論でき，ゲームの値及び解は次式で与えられることが確認できる．

$$\begin{aligned}v(n,k,l) &= \frac{ad-bc}{a-b-c+d}\\ &= \frac{\{\alpha p_1 - p_2 + (1-p_1)v(n-1,k-1,l-1)\}v(n-1,k,l)+\{1-v(n-1,k,l-1)\}v(n-1,k-1,l)}{\alpha p_1 - p_2 + (1-p_1)v(n-1,k-1,l-1)+1-v(n-1,k,l-1)-v(n-1,k-1,l)+v(n-1,k,l)}\end{aligned} \tag{15}$$

$$x_1^* = \frac{d-b}{a-b-c+d},\quad x_2^* = \frac{a-c}{a-b-c+d},\quad y_1^* = \frac{d-c}{a-b-c+d},\quad y_2^* = \frac{a-b}{a-b-c+d}\ . \tag{16}$$

このゲームの解に関する漸化式を用い，初期条件 (4) 式からの繰り返し計算により，任意の添字 (n,k,l) に対するゲームの値 $v(n,k,l)$ を求めることができる．また，プレイヤーBの密輸予定回数が $l=1$ の場合には，ゲームの値を閉じた式として導くことが可能である．以下では l は定数1であるため，例えば $v(n,k,l)$ を $v(n,k)$ と書く等，これまで使用した記号において引数 l を省くものとする．

定理 1 ゲーム $\Gamma(n,k,l)$ は混合戦略による均衡点をもち，ゲームの値 $v(n,k,l)$ は漸化式 *(15)* により計算できる．ただし，$l=1$ の場合は次のような閉じた式で与えられる．

(i) $k=n$ の場合，$v(n,n,1)=0$ であり，最適戦略は $x_1^*=1,\ y_1^*=0$ となる．
(ii) $n>k$ の場合，ゲームの値は次式で与えられる．

$$v(n,k,1)=-\begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} \Big/ \sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1-p_2)^{k-r}\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}\ . \tag{17}$$

分子にある組合せ数 ${}_{n-1}C_k$ を $k=n$ の場合にはゼロとすると約束すれば，*(17)* 式をケース *(i)* を含む式と解釈できる．

（証明） (i) 補題1より明らかである．
(ii) まず，(15) 式から $l=1$ に関するゲームの値の漸化式を次のように得る．

$$v(n,k)=\frac{(\alpha p_1-p_2)v(n-1,k)+v(n-1,k-1)}{\alpha p_1-p_2+1-v(n-1,k-1)+v(n-1,k)}\ . \tag{18}$$

式 (17) は，初期値 $v(1,1)=0$ 及び $v(n,0)=-1$ に一致することが確認できる．さて，$v(n,k)$ に関する公式 (17) の代わりに，この公式を変形した $1/(v(n,k)+1)$ に関する次式が成り立つことを証明しよう．ただし，次式及びこれ以降の式の変形では，パスカルの公式 ${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$ が多用できることに注意しよう．

$$\frac{1}{v(n,k)+1}=\frac{\sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1-p_2)^{k-r}{}_nC_r}{\sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1-p_2)^{k-r}{}_nC_r-{}_{n-1}C_k}=\frac{\sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1-p_2)^{k-r}{}_nC_r}{\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1-p_2)^{k-r}{}_nC_r+{}_{n-1}C_{k-1}}\ . \tag{19}$$

$k=1$ の場合に (18) 式を変形すると次のようになる．

$$v(n,1)+1=\frac{(\alpha p_1-p_2)v(n-1,1)-1}{\alpha p_1-p_2+2+v(n-1,1)}+1=\frac{(\alpha p_1-p_2+1)(v(n-1,1)+1)}{\alpha p_1-p_2+1+v(n-1,1)+1}\ .$$

この逆数をとると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{v(n,1)+1}&=\frac{1}{v(n-1,1)+1}+\frac{1}{\alpha p_1-p_2+1}=\frac{1}{v(n-2,1)+1}+\frac{2}{\alpha p_1-p_2+1}=\cdots\\&=\frac{1}{v(1,1)+1}+\frac{n-1}{\alpha p_1-p_2+1}=\frac{\alpha p_1-p_2+n}{\alpha p_1-p_2+1}\end{aligned}$$

となることから，$v(n,1)$ に関して (19) 式は成り立つ．同様に，$v(n-1,k)$，$k=1,\cdots,n-1$ に関しても正しいと仮定して，一般に $v(n,k)$ に対する妥当性を言おう．式 (18) より次式が成り立つ．

$$v(n,k)+1=\frac{(\alpha p_1-p_2+1)(v(n-1,k)+1)}{\alpha p_1-p_2-v(n-1,k-1)+1+v(n-1,k)}\ .$$

ここで逆数をとり，$v(n-1,\cdot)$ に対する (18) 式及び (19) 式を用いて変形すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{v(n,k)+1}&=\frac{\alpha p_1-p_2-v(n-1,k-1)}{\alpha p_1-p_2+1}\frac{1}{v(n-1,k)+1}+\frac{1}{\alpha p_1-p_2+1}\\&=\frac{\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1-p_2)^{k-r}{}_{n-1}C_r+{}_{n-2}C_{k-1}}{(\alpha p_1-p_2+1)\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1-p_2)^{k-1-r}{}_{n-1}C_r}\cdot\frac{\sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1-p_2)^{k-r}{}_{n-1}C_r}{\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1-p_2)^{k-r}{}_{n-1}C_r+{}_{n-2}C_{k-1}}+\frac{1}{\alpha p_1-p_2+1}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1 - p_2)^{k-r}{}_{n-1}C_r + \sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1 - p_2)^{k-1-r}{}_{n-1}C_r}{(\alpha p_1 - p_2 + 1)\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1 - p_2)^{k-1-r}{}_{n-1}C_r}$$
$$= \frac{\sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1 - p_2)^{k-r}{}_{n-1}C_r + \sum_{r=1}^{k}(\alpha p_1 - p_2)^{k-r}{}_{n-1}C_{r-1}}{(\alpha p_1 - p_2 + 1)\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1 - p_2)^{k-1-r}{}_{n-1}C_r}$$
$$= \frac{\sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1 - p_2)^{k-r}{}_{n}C_r}{(\alpha p_1 - p_2 + 1)\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1 - p_2)^{k-1-r}{}_{n-1}C_r}$$

となるが，最終式の分母は

$$(\alpha p_1 - p_2 + 1)\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1 - p_2)^{k-1-r}{}_{n-1}C_r = \sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1 - p_2)^{k-r}{}_{n-1}C_r + \sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1 - p_2)^{k-1-r}{}_{n-1}C_r$$
$$= \sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1 - p_2)^{k-r}{}_{n}C_r + {}_{n-1}C_{k-1}$$

となるから，$v(n,k)$ に対しても式 (19) は成り立ち，証明は終了する． **Q.E.D.**

$l=1$ の場合には，定理 1 のように閉じた形でゲームの値及び解が与えられるから，解の最適性について意外な観点から検証することができる．以下の性質は，Sakaguchi [6] がすでに彼のモデルに関して述べたものであるが，同じ性質がこのモデルについても当てはまる．

系 1 密輸者が 1 回限りの密輸を企てる場合 ($l=1$)，プレイヤーAが最適戦略を採る限り，当該ステージからみたパトロール実施確率は将来のどのステージでも同じとなり，その意味でプレイヤーBが密輸を意図する上で将来のステージに不利，有利の差はない．

(証明) 残存日数 n，パトロール実施可能日数 k の状態において，パトロール実施 (P) の最適選択確率 $x_k(n)$ は，式 (16) の x_1^* で $l=1$ とおいたものに等しく，以下で与えられる．

$$x_k(n) = \frac{1+v(n-1,k)}{\alpha p_1 - p_2 - v(n-1,k-1) + 1 + v(n-1,k)}.$$

これに式 (17) を代入すると，上式の分子は次のように変形できる．

$$\begin{aligned}1+v(n-1,k) &= 1 - \frac{{}_{n-2}C_k}{\sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1 - p_2)^{k-r}{}_{n-1}C_r} = \frac{\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1 - p_2)^{k-r}{}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_k - {}_{n-2}C_k}{\sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1 - p_2)^{k-r}{}_{n-1}C_r}\\ &= \frac{\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1 - p_2)^{k-r}{}_{n-1}C_r + {}_{n-2}C_{k-1}}{\sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1 - p_2)^{k-r}{}_{n-1}C_r}.\end{aligned}$$

また，分母の中の次の部分式は以下のように変形される．

$$\begin{aligned}\alpha p_1 - p_2 - v(n-1,k-1) &= \alpha p_1 - p_2 + \frac{{}_{n-2}C_{k-1}}{\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1 - p_2)^{k-1-r}{}_{n-1}C_r}\\ &= \frac{\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1 - p_2)^{k-r}{}_{n-1}C_r + {}_{n-2}C_{k-1}}{\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1 - p_2)^{k-1-r}{}_{n-1}C_r}.\end{aligned}$$

以上から，$x_k(n)$ は次のように整理できる．

$$x_k(n) = \frac{\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1 - p_2)^{k-1-r}{}_{n-1}C_r}{\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1 - p_2)^{k-1-r}{}_{n-1}C_r + \sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1 - p_2)^{k-r}{}_{n-1}C_r} = \frac{\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1 - p_2)^{k-1-r}{}_{n-1}C_r}{\sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1 - p_2)^{k-r}{}_{n}C_r}. \quad (20)$$

同様に，パトロール未実施 (NP) の最適選択確率 $1-x_k(n)$ は次式となる．

$$1 - x_k(n) = \frac{\sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1 - p_2)^{k-r}{}_{n-1}C_r}{\sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1 - p_2)^{k-r}{}_{n}C_r}. \quad (21)$$

いま，当該ステージ n においてプレイヤーBが密輸を実施しないものとすると，ゲームは次のステージ $n-1$ に必ず遷移する．ただし，当該ステージ n でパトロールを実施すれば状態 (ステージ数, パトロール可能回数) $=(n-1,k-1)$ へ，パトロールを実施しなければ状態 $(n-1,k)$ へ変化する．ここで (20)，(21) 式を用いれば，次のステージ $n-1$ においてパトロールを実施する確率は，以下の式で評価できる．

$$\begin{aligned}
x_k(n)x_{k-1}(n-1)+(1-x_k(n))x_k(n-1) &= \frac{\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1-p_2)^{k-1-r}{}_{n-1}C_r}{\sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1-p_2)^{k-r}{}_nC_r}\cdot\frac{\sum_{r=0}^{k-2}(\alpha p_1-p_2)^{k-2-r}{}_{n-2}C_r}{\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1-p_2)^{k-1-r}{}_{n-1}C_r} \\
&\quad+\frac{\sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1-p_2)^{k-r}{}_{n-1}C_r}{\sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1-p_2)^{k-r}{}_nC_r}\cdot\frac{\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1-p_2)^{k-1-r}{}_{n-2}C_r}{\sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1-p_2)^{k-r}{}_{n-1}C_r} \\
&=\frac{\sum_{r=0}^{k-2}(\alpha p_1-p_2)^{k-2-r}{}_{n-2}C_r+\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1-p_2)^{k-1-r}{}_{n-2}C_r}{\sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1-p_2)^{k-r}{}_nC_r} \\
&=\frac{\sum_{r=1}^{k-1}(\alpha p_1-p_2)^{k-1-r}{}_{n-2}C_{r-1}+\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1-p_2)^{k-1-r}{}_{n-2}C_r}{\sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1-p_2)^{k-r}{}_nC_r} \\
&=\frac{\sum_{r=0}^{k-1}(\alpha p_1-p_2)^{k-1-r}{}_{n-1}C_r}{\sum_{r=0}^{k}(\alpha p_1-p_2)^{k-r}{}_nC_r}\ .
\end{aligned}$$

式 (20) から，上式は $x_k(n)$ と一致することが分かる．以上の計算は，$n-1$ ステージを基点とした場合の $n-2$ ステージでのパトロールの実施確率に応用できる．すなわち，状態 $(n-1,k-1)$ から見た $n-2$ ステージでのパトロール実施確率は $x_{k-1}(n-1)$ であり，状態 $(n-1,k)$ から見たその確率は $x_k(n-1)$ である．したがって，当該ステージ n から2ステージ推移後の $n-2$ ステージにおけるパトロール実施確率は，上の計算と同じく $x_k(n)x_{k-1}(n-1)+(1-x_k(n))x_k(n-1)$ により評価でき，当然のことながらその結果も等しくなる．以上の計算は残り日数が k となるまで続けることができ，$n-1,n-2,\cdots,k+1$ の将来の各ステージにおけるパトロール実施確率は，現在のステージ n における実施確率 $x_k(n)$ と等しくなる．
Q.E.D.

4 完全摘発モデル

本論文は，2節の前提 (A4) で述べたように，プレイヤーBの密輸決行に対するプレイヤーAのパトロールが必ずしも摘発とならない場合（完全摘発でない場合）を取り扱っているが，これまでの他の研究では完全摘発を仮定したモデルの方がむしろ多い．Sakaguchi のモデル [6] は本研究の前提 (A1)~(A3) と同じ前提を持つが，完全摘発を仮定している．また，本モデルと異なり，摘発の生起に拘わらず予定している密輸実行回数が尽きるまでゲームは繰り返される．また，プレイヤーAへの支払は，摘発による利得1の獲得と密輸成功による損失1の発生により特徴づけられている．以上のような Sakaguchi モデルは，$p_1=0$, $p_2=-1$ とおいた本モデルに完全に一致する．すなわち，行列ゲーム (3) 式の1行1列の要素における式 αp_1-p_2 を1としたものが，Sakaguchi モデルに他ならない．本モデルの説明では，p_1 を摘発確率，p_2 を密輸成功確率と考えたが，完全摘発であるからといって $p_1=1$ と設定したのでは摘発によりゲームが終了し，Sakaguchi モデルの繰り返しゲームを実現できない．

実は，$p_1=0$, $p_2=-1$ のパラメータ設定によっても，次の1点を除いて補題1，補題2，定理1及び系1はすべて成立する．例外のその1点とは，次のように補題2の式 (10) の不等号に等号が入ることである．

$$\alpha p_1-p_2+(1-p_1)v(n-1,k-1,l-1)\geq -1+v(n-1,k,l-1)\ . \tag{22}$$

すなわち，式 (13) において $a \geq b$ が成り立つということである．ただし，少なくとも a, c 間には狭義の不等式 $a > c$ が成立するから，$a = b$ と $c = d$ が同時に成立することはない．したがって $a - b - c + d \neq 0$ となり，ゲームの値は相変わらず式 (15) により与えられる．このことは，各要素間で等号が成り立ちゲームに鞍点のある次の3つの場合を考察すれば明らかである．(i) $c = d$ の場合: $v(n,k,l) = c = d$, (ii) $b = d$ の場合: $v(n,k,l) = d = b$, (iii) $a = b$ の場合: $v(n,k,l) = a = b$. したがって，$l = 1$ の場合のゲームの値に関する式 (17) に $\alpha p_1 - p_2 = 1$ を代入すれば，Baston and Bostock [1] 及び Sakaguchi [6] が導出した式を求めることができる．さらに，Sakaguchi は一般の繰り返しゲームの値が $v(n,k,l) = lv(n,k)$ となることを証明したが，これも $v(n-1,k,l) = lv(n-1,k)$ の仮定が式 (15) に対する次のような変形を可能にすることからも容易に証明できる．

$$
\begin{aligned}
v(n,k,l) &= \frac{\{1+(l-1)v(n-1,k-1)\}lv(n-1,k) + \{1-(l-1)v(n-1,k)\}lv(n-1,k-1)}{1+(l-1)v(n-1,k-1)+1-(l-1)v(n-1,k)-lv(n-1,k-1)+lv(n-1,k)} \\
&= l\frac{v(n-1,k)+v(n-1,k-1)}{2-v(n-1,k-1)+v(n-1,k)} = lv(n,k) \, .
\end{aligned}
$$

ただし，最後の等式への変形は $\alpha p_1 - p_2 = 1$ を代入した (15) 式と (18) 式を使用した．Sakaguchi は繰り返しゲームの各ステージでの最適解が混合戦略であることを仮定した上で上式を導いていたが，3節で証明したようにこのケースだけを考えれば十分である．

5 数値例

プレイヤーBの拿捕によるプレイヤーAの獲得価値を $\alpha = 2$, 拿捕確率を $p_1 = 0.5$, 密輸成功確率を $p_2 = 0.3$ と設定し，ゲームの残り日数を $n = 1, \cdots, 7$ で変化させながら，可能最大パトロール回数 k 及び密輸回数 l のすべての組合せに対しゲームの値を調べたのが表1であり，プレイヤーA及びBの最適混合戦略 (x_1^*, y_1^*) を示したのが表2である．

補題2で述べたように，ゲームの値 $v(n,k,l)$ の非正性及び残り日数 n に対する非増加性は明らかである．同様な単調性として，パトロール実施可能回数 k に対する非減少性，密輸実施可能回数 l に対する非増加性が表1から見てとれる．n, l が一定である場合，k が0から n まで変わるとゲームの値は $-l$ から0までの変化をみせるのに対し，l に対するゲームの値の変化は k が大きい場合と小さい場合とでは異なる．すなわち，k が小さい場合には l の増加はプレイヤーB側に密輸成功による利得をもたらす公算が大きく，可能回数 l 回の中で予定される密輸決行回数も大きくなることが予想される．それは間接的にプレイヤーBの最適戦略 y_1^* からも想像され，例えば，表2において $n = 5$, $k = 1$ に対する $l = 1, \cdots, 5$ の密輸決行確率は $y_1^* = 0.18, 0.32, \cdots, 0.64$ と大きく増加してゆく．逆に k の大きい場合には，密輸決行がプレイヤーA側のパトロールに出会う可能性が高くなることが考慮され，l が大きい場合においてさえ実質的な密輸決行は見合わせられるケースが多くなる．例えば，$n = 5$, $k = 4$ のケースで $l = 1, \cdots, 5$ と変化した場合，表2は y_1^* が 0.05 と 0.07 の間の低い値に留まっていることを示している．以上のことを理解する上で，k, l の値とは別に，プレイヤーが行動を起こす期待回数を求めることは興味深く，以下でその求め方を議論しよう．

状態 (n,k,l) からゲーム終了までのプレイヤーA，Bのパトロール実施回数及び密輸決行回数の期待値をそれぞれ $N_P(n,k,l)$ 及び $N_S(n,k,l)$ とする．また，この状態におけるプレイヤーA，Bの最適混合戦略を，3節での議論のように x_1^*, y_1^* で表す．ステージ n におけるこの状態は次のステージ $n-1$ での4つの状態 $(n-1,k,l)$, $(n-1,k-1,l)$, $(n-1,k,l-1)$, $(n-1,k-1,l-1)$ と "ゲーム終了" の5つの状態に遷移可能であるが，それぞれの遷移確率は $(1-x_1^*)(1-y_1^*)$, $x_1^*(1-y_1^*)$, $(1-x_1^*)y_1^*$, $x_1^*y_1^*(1-p_1)$ 及び $x_1^*y_1^*p_1$ であ

る．また，それぞれの遷移に際し"パトロール"と"密輸"の実施回数を示す確率変数 X, Y は $(X,Y)=(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ 及び $(1,1)$ であるから，$N_P(n,k,l)$, $N_S(n,k,l)$ は以下の漸化式により計算できる．ただし，x_1^*, y_1^* は状態 (n,k,l) に依存する最適戦略である．

$$\begin{aligned} N_P(n,k,l) &= (1-x_1^*)(1-y_1^*)N_P(n-1,k,l)+x_1^*(1-y_1^*)\{1+N_P(n-1,k-1,l)\} \\ &\quad +(1-x_1^*)y_1^*N_P(n-1,k,l-1)+x_1^*y_1^*\{1+(1-p_1)N_P(n-1,k-1,l-1)\}, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\text{初期条件} \ : \ N_P(0,k,l)=0,\ N_P(n,k,0)=k,\ N_P(n,0,l)=0. \tag{24}$$

$$\begin{aligned} N_S(n,k,l) &= (1-x_1^*)(1-y_1^*)N_S(n-1,k,l)+x_1^*(1-y_1^*)N_S(n-1,k-1,l) \\ &\quad +(1-x_1^*)y_1^*\{1+N_S(n-1,k,l-1)\}+x_1^*y_1^*\{1+(1-p_1)N_S(n-1,k-1,l-1)\}, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\text{初期条件} \ : \ N_S(0,k,l)=0,\ N_S(n,k,0)=0,\ N_S(n,0,l)=l. \tag{26}$$

上で説明したように，この期待回数には最終ステージ $n=0$ に到達する以前の拿捕によりゲームが終了する場合も考慮されており，実際に実行を計画しても実行されずに終わることもある．

表3は，表1及び2と同じ範囲で (n,k,l) を変化させ，これら2つの値を組 $(N_P(n,k,l),\ N_S(n,k,l))$ の形で記載したものである．$n=5$, $k=1$ の場合には $l=1\sim5$ に対し $N_S(n,k,l)$ は 0.91 から 3.1 までの期待密輸回数があるのに比べ，$n=5$, $k=4$ の場合には，たとえ高い密輸実行可能回数 $l=5$ が与えられたとしても 0.31 回ほどの密輸決行しか期待できずにゲームが終わる．

次に，表2によりプレイヤーの最適戦略の特徴を見てみよう．パトロール実施確率 x_1^* は k とともに大きくなり，$k=n$ となればすべてのステージでパトロールが実施可能であると同時に，実際にも必ず実施すること（$x_1^*=1$）が最適であることは補題1で述べられているとおりである．また，l が大きくなれば密輸実施の可能性が高くなり，それに対応して x_1^* も大きくなる．y_1^* の増減に関しては次の特徴が挙げられる．k が大きくなりプレイヤーAがパトロールを実施する確率が高くなると，それを避けるために密輸決行確率 y_1^* は下がる．また，l とともに y_1^* は増加するが，上述した $n=5$, $k=4$ の例のように大きな k の場合には y_1^* そのものが低い値に留まっており，当然 l に対するこの値の増加量もかなり小さい．系1は1回の密輸可能回数 $l=1$ の場合について述べたものであるが，表2を使って $n=5$ $k=$ 3, $l=1$ の一例について説明するならば次のようになる．プレイヤーBは与えられた1回の密輸機会をいつ実行に移すかに関心があるが，彼にはプレイヤーAが現時点を含めどのステージにおいても 0.47 の確率でパトロールを行うであろうと予想できる．もし彼が $n=5$ の現時点で密輸を決行しないのに対し，敵対者が仮にパトロールを実施して1回のパトロール回数を無駄に消費させた次の時点では，それ以降のパトロール実施確率は将来にわたり常時 0.4 と低く見積もることができる．しかし，プレイヤーBと同様プレイヤーAもパトロールを実施せずに次の時点に移ることになれば，この確率は 0.53 となり当然現在の見積値より高くなる．このような状況下でプレイヤーAが実際に密輸を決行するかどうかは，相当困難な意思決定を必要とするであろう．全知的合理性をもつプレイヤー間のゲームは，常にこのような意思決定をプレイヤーに強いることになる．

最後に，表3によりパトロール及び密輸の期待実施回数の特徴を調べてみよう．パトロールの実施はプレイヤーAには何のコストもペナルティも科さないから，最終ステージまでには可能回数 k 回のパトロールをすべて実施するような計画をプレイヤーAは立てる．$k=1$ の場合には必ずパトロールを1度実施することになり $N_P(n,1,l)=1$ である．$k=n$ の場合は，補題1で証明されているように，プレイヤーBは一度も密輸を決行することがないから拿捕によるゲームの終了は一切なく，各ステージでパトロールが実施され最終ステージに到達してゲームは終わる．つまり，$N_P(n,n,l)=n$, $N_S(n,n,l)=0$ である．$2\le k\le n-1$ では，拿捕によりパトロールの計画回数 k が実施されずに終了する場合もあるため，期待値 $N_P(n,k,l)$ は

k より幾分小さい．$N_P(n,k,l)$ は k とともに増加する．また，l の増加とともに減少するが，これは拿捕の発生確率が高まる効果による．密輸決行の期待回数 $N_S(n,k,l)$ は，$k=0$ のときの値 l と $k=n$ のときの値 0 の間を k の増加とともに減少する．これはプレイヤーBがパトロールに遭遇することを恐れ密輸決行を手控えることが理由であることが，表2の最適戦略 y_1^* の変化から理解できる．また，l に対して有する単調増加性に関し，大きな k の場合と小さな場合とで $N_S(n,k,l)$ の増加量に違いのある現象は上述した y_1^* の特徴と同じであり，また同じ説明が可能である．

表1．ゲームの値

n	k	l=1	l=2	l=3	l=4	l=5	l=6	l=7
1	0	-1						
	1	0						
2	0	-1	-2					
	1	-0.37	-0.45					
	2	0	0					
3	0	-1	-2	-3				
	1	-0.54	-0.91	-1.03				
	2	-0.18	-0.23	-0.24				
	3	0	0	0				
4	0	-1	-2	-3	-4			
	1	-0.64	-1.15	-1.51	-1.64			
	2	-0.32	-0.51	-0.58	-0.59			
	3	-0.10	-0.13	-0.13	-0.13			
	4	0	0	0	0			
5	0	-1	-2	-3	-4	-5		
	1	-0.70	-1.31	-1.80	-2.15	-2.28		
	2	-0.43	-0.73	-0.92	-1.00	-1.01		
	3	-0.20	-0.31	-0.35	-0.36	-0.36		
	4	-0.05	-0.07	-0.07	-0.07	-0.07		
	5	0	0	0	0	0		
6	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	
	1	-0.75	-1.41	-1.99	-2.46	-2.80	-2.93	
	2	-0.51	-0.90	-1.19	-1.37	-1.44	-1.46	
	3	-0.30	-0.49	-0.60	-0.64	-0.65	-0.66	
	4	-0.13	-0.20	-0.22	-0.23	-0.23	-0.23	
	5	-0.03	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	
	6	0	0	0	0	0	0	
7	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
	1	-0.78	-1.49	-2.13	-2.68	-3.13	-3.45	-3.58
	2	-0.57	-1.03	-1.40	-1.67	-1.83	-1.91	-1.92
	3	-0.37	-0.64	-0.82	-0.93	-0.97	-0.98	-0.99
	4	-0.21	-0.33	-0.40	-0.43	-0.44	-0.44	-0.44
	5	-0.08	-0.12	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	6	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02
	7	0	0	0	0	0	0	0

表２．　最適戦略

n	k	l=1	l=2	l=3	l=4	l=5	l=6	l=7
1	0	(0, 1)						
	1	(1, 0)						
2	0	(0, 1)	(0, 1)					
	1	(0.37,0.37)	(0.45,0.45)					
	2	(1,0)	(1,0)					
3	0	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)				
	1	(0.27,0.27)	(0.29,0.50)	(0.37,0.57)				
	2	(0.48,0.18)	(0.51,0.23)	(0.52,0.24)				
	3	(1,0)	(1,0)	(1,0)				
4	0	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)			
	1	(0.21,0.21)	(0.22,0.39)	(0.25,0.55)	(0.31,0.62)			
	2	(0.40,0.18)	(0.41,0.30)	(0.44,0.35)	(0.45,0.36)			
	3	(0.53,0.10)	(0.54,0.13)	(0.55,0.13)	(0.55,0.13)			
	4	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)			
5	0	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)		
	1	(0.18,0.18)	(0.18,0.32)	(0.19,0.45)	(0.21,0.58)	(0.27,0.64)		
	2	(0.34,0.16)	(0.35,0.27)	(0.36,0.36)	(0.38,0.41)	(0.40,0.42)		
	3	(0.47,0.12)	(0.48,0.19)	(0.49,0.22)	(0.50,0.23)	(0.50,0.23)		
	4	(0.56,0.05)	(0.56,0.07)	(0.57,0.07)	(0.57,0.07)	(0.57,0.07)		
	5	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)		
6	0	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	
	1	(0.15,0.15)	(0.15,0.27)	(0.16,0.37)	(0.17,0.48)	(0.19,0.60)	(0.24,0.65)	
	2	(0.29,0.14)	(0.30,0.24)	(0.31,0.33)	(0.32,0.40)	(0.34,0.44)	(0.35,0.45)	
	3	(0.41,0.12)	(0.42,0.20)	(0.43,0.26)	(0.44,0.29)	(0.45,0.29)	(0.45,0.29)	
	4	(0.51,0.08)	(0.52,0.13)	(0.53,0.15)	(0.53,0.15)	(0.53,0.15)	(0.53,0.15)	
	5	(0.57,0.03)	(0.57,0.04)	(0.58,0.04)	(0.58,0.04)	(0.58,0.04)	(0.58,0.04)	
	6	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	
7	0	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)
	1	(0.13,0.13)	(0.13,0.23)	(0.14,0.32)	(0.14,0.41)	(0.15,0.50)	(0.17,0.61)	(0.21,0.65)
	2	(0.25,0.12)	(0.26,0.22)	(0.26,0.30)	(0.28,0.37)	(0.29,0.42)	(0.31,0.46)	(0.32,0.46)
	3	(0.37,0.11)	(0.37,0.19)	(0.38,0.25)	(0.39,0.30)	(0.40,0.32)	(0.41,0.33)	(0.41,0.33)
	4	(0.47,0.09)	(0.47,0.15)	(0.48,0.19)	(0.49,0.20)	(0.49,0.21)	(0.49,0.21)	(0.49,0.21)
	5	(0.54,0.06)	(0.54,0.09)	(0.55,0.10)	(0.55,0.10)	(0.55,0.10)	(0.55,0.10)	(0.55,0.10)
	6	(0.58,0.02)	(0.58,0.02)	(0.58,0.02)	(0.58,0.02)	(0.58,0.02)	(0.58,0.02)	(0.58,0.02)
	7	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)

表３．　パトロール及び密輸の期待実施回数

n	k	l=1	l=2	l=3	l=4	l=5	l=6	l=7
1	0	(0, 1)						
	1	(1, 0)						
2	0	(0, 1)	(0,2)					
	1	(1.00,0.60)	(1.00,0.81)					
	2	(2, 0)	(2, 0)					
3	0	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)				
	1	(1.00,0.79)	(1.00,1.36)	(1.00,1.61)				
	2	(1.96,0.42)	(1.94,0.58)	(1.94,0.60)				
	3	(3, 0)	(3, 0)	(3, 0)				
4	0	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)			
	1	(1.00,0.87)	(1.00,1.59)	(1.00,2.13)	(1.00,2.37)			
	2	(1.94,0.64)	(1.91,1.05)	(1.89,1.25)	(1.89,1.29)			
	3	(2.93,0.30)	(2.90,0.42)	(2.90,0.44)	(2.90,0.44)			
	4	(4, 0)	(4, 0)	(4,0)	(4, 0)			
5	0	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 5)		
	1	(1.00,0.91)	(1.00,1.71)	(1.00,2.38)	(1.00,2.88)	(1.00,3.10)		
	2	(1.94,0.76)	(1.90,1.33)	(1.87,1.71)	(1.85,1.90)	(1.85,1.94)		
	3	(2.89,0.52)	(2.82,0.83)	(2.79,0.98)	(2.78,1.02)	(2.78,1.02)		
	4	(3.92,0.21)	(3.89,0.29)	(3.88,0.31)	(3.88,0.31)	(3.88,0.31)		
	5	(5, 0)	(5, 0)	(5, 0)	(5, 0)	(5, 0)		
6	0	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 5)	(0, 6)	
	1	(1.00,0.94)	(1.00,1.78)	(1.00,2.52)	(1.00,3.15)	(1.00,3.61)	(1.00,3.82)	
	2	(1.94,0.83)	(1.90,1.50)	(1.86,2.00)	(1.84,2.34)	(1.83,2.51)	(1.82,2.55)	
	3	(2.87,0.67)	(2.78,1.13)	(2.73,1.41)	(2.70,1.56)	(2.69,1.60)	(2.69,1.60)	
	4	(3.85,0.42)	(3.76,0.66)	(3.73,0.77)	(3.72,0.80)	(3.72,0.80)	(3.72,0.80)	
	5	(4.92,0.15)	(4.89,0.20)	(4.89,0.22)	(4.88,0.22)	(4.88,0.22)	(4.88,0.22)	
	6	(6, 0)	(6, 0)	(6, 0)	(6, 0)	(6, 0)	(6, 0)	
7	0	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 5)	(0, 6)	(0, 7)
	1	(1.00,0.95)	(1.00,1.82)	(1.00,2.61)	(1.00,3.31)	(1.00,3.90)	(1.00,4.33)	(1.00,4.52)
	2	(1.95,0.88)	(1.90,1.61)	(1.87,2.20)	(1.84,2.65)	(1.82,2.95)	(1.81,3.10)	(1.81,3.14)
	3	(2.87,0.76)	(2.77,1.32)	(2.70,1.73)	(2.65,1.98)	(2.63,2.11)	(2.62,2.14)	(2.62,2.15)
	4	(3.81,0.58)	(3.69,0.95)	(3.61,1.18)	(3.58,1.28)	(3.56,1.32)	(3.56,1.32)	(3.56,1.32)
	5	(4.83,0.33)	(4.74,0.51)	(4.70,0.59)	(4.69,0.62)	(4.69,0.62)	(4.69,0.62)	(4.69,0.62)
	6	(5.93,0.10)	(5.90,0.14)	(5.90,0.15)	(5.90,0.15)	(5.90,0.15)	(5.90,0.15)	(5.90,0.15)
	7	(7, 0)	(7, 0)	(7, 0)	(7, 0)	(7, 0)	(7, 0)	(7, 0)

6　おわりに

この論文では，パトロール実施と密輸実施の複数回の機会をもつ税関対密輸者の間の取締りゲームを取り扱った．それは，密輸者拿捕の確率と，たとえパトロール実施中であっても密輸成功の可能性のある，いわば両プレイヤーにとって任務達成確率が考慮されたモデルとなっている．したがって，あるステージにおけ

るゲームは次のステージにおけるいくつかの状態へ，またはゲーム終了へ確率的に遷移し，我々はこの問題を確率多段ゲームに定式化した．その後ゲームの性質を調べることにより，どのステージにおけるゲームも最適混合戦略による均衡解を持つことが証明され，密輸実施可能回数が1回の場合においては最適解を閉じた式で与えることができた．また，過去にその研究事例の多い完全拿捕モデルに関しても，本モデルの特殊例として得られることを示した．

本モデルでは税関によるパトロールの実施には何のコストも伴わないため，税関の最適戦略は可能なすべてのパトロールを実施しようとする計画となるが，ここにコスト発生要素を組み入れることによりパトロール回数の節約を考慮する必要性が生じる．さらに，密輸者側にも密輸決行の中止に対し何らかのペナルティーを科すことにより，両プレイヤーにとってコスト効率が関心事となるゲームとなるが，科されるコスト要素が両プレイヤーの共通の価値基準や単位を持たないようなものであれば，支払いにおけるゼロ和の性質が失われ各ステージにおける行列ゲームは双行列ゲームの様相を帯びる．このようなモデルは我々に1つの将来研究を与える．さて，密輸者側から見れば，必ずしも可能回数すべての密輸を決行する必要のない本モデルの前提により，ゲームの値は常に非正となり，ステージ数の増加は税関側に不利を強いるが，予定された回数すべての密輸決行が密輸者に強制される他のモデルにあっては，ゲームはまったく違った性質を有することになるであろう．このようなモデルも，我々のもう1つの将来研究となる．

参考文献

[1] V. Baston and F. Bostock, A Generalized Inspection Game, *Naval Research Logistics*, **38**, pp.171-182, 1991.

[2] M. Dresher, A Sampling Inspection Problem in Arms Control Agreements: A Game-Theoretic Analysis, Memorandum RM-2972-ARPA, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1962.

[3] T. Ferguson and C. Melolidakis, On the Inspection Game, *Naval Research Logistics*, **45**, pp.327-334, 1998.

[4] A. Garnaev, A Remark on the Customs and Smuggler Game, *Naval Research Logistics*, **41**, pp.287-293, 1994.

[5] M. Maschler, A Price Leadership Method for Solving the Inspection's Non-Constant-Sum Game, *Naval Research Logistics Quarterly*, **13**, pp.11-33, 1966.

[6] M. Sakaguchi, A Sequential Game of Multi-Opportunity Infiltration, *Mathematica Janonica*, **39**, pp.157-166, 1994.

[7] M. Thomas and Y. Nisgav, An Infiltration Game with Time Dependent Payoff, *Naval Research Logistics Quarterly*, **23**, pp.297-302, 1976.